Hertentamen

Elektriciteit en Magnetisme 1

Vrijdag 27 augustus 2010

9:00-12:00

Schrijf op *elk* vel uw naam en studentnummer.

Schrijf leesbaar.

Maak elke opgave op een *apart* vel.

Dit tentamen bestaat uit 4 vragen. Alle vier vragen hebben een gelijk gewicht.

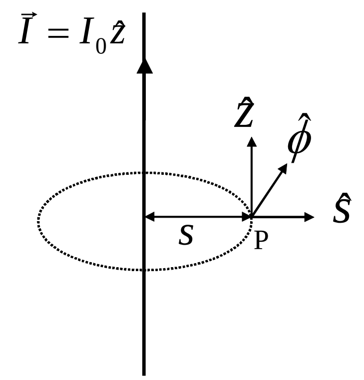
OPGAVE 1

Punten: a+b+c+d+e=3+4+4+4+3=18

Door een oneindig lange draad loopt een stroom $\vec{I} = I_0\hat{z}$ (zie figuur hieronder).

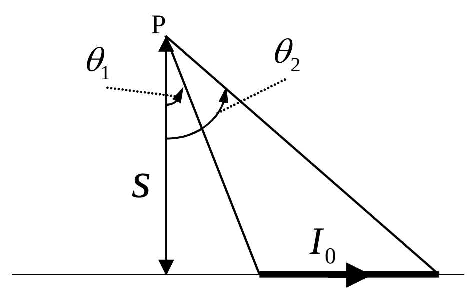
a) Geef de wet van Ampère voor het magnetisch veld $\vec{B}$ in integrale vorm.

b) Bepaal de grootte en richting van het magnetisch veld $\vec{B}$ in punt P op afstand s van de draad.



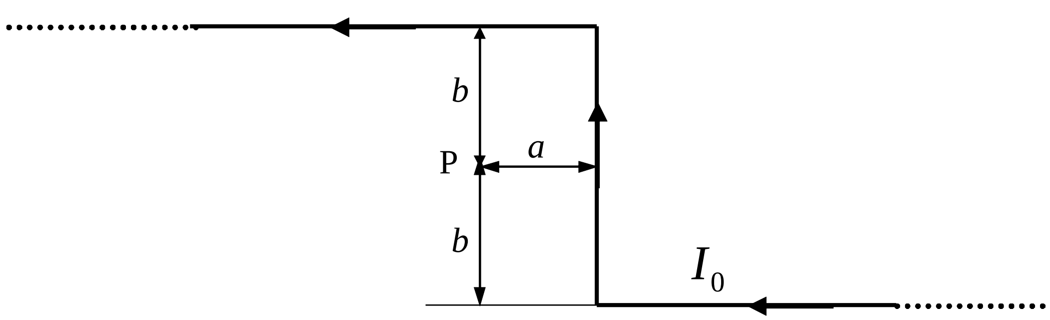
De grootte van het magneetveld in punt P op afstand s van een eindige draad waardoor een stroom I_0 loopt (zie nevenstaande figuur) wordt gegeven door,

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi s}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$



c) Laat zien dat als de draad oneindig lang zou zijn de grootte van het veld bepaald via bovenstaande formule overeenstemt met de grootte zoals onder b) gevonden.

Beschouw nu de onderstaande situatie met een oneindige stroomdraad waarin twee rechte hoeken gebogen zijn.



d) Bepaal de grootte en richting van het magnetisch veld in het punt P.

e) Indien $b >> a$ wat wordt dan de grootte van het magnetisch veld? En als $a >> b$?

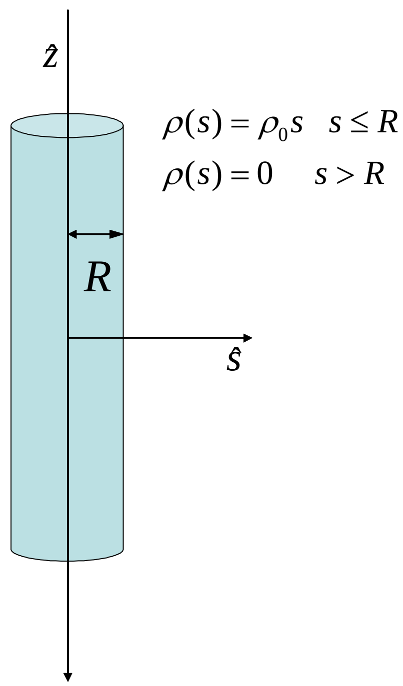
OPGAVE 2

Punten: a+b =9+9=18

Gegeven is een oneindige cilinder met straal R. De cilinder heeft een volumeladingsdichtheid die gegeven wordt door $\rho(s) = \rho_0 s$ (zie onderstaande figuur).

a) Bereken het elektrische veld buiten en binnen de cilinder.

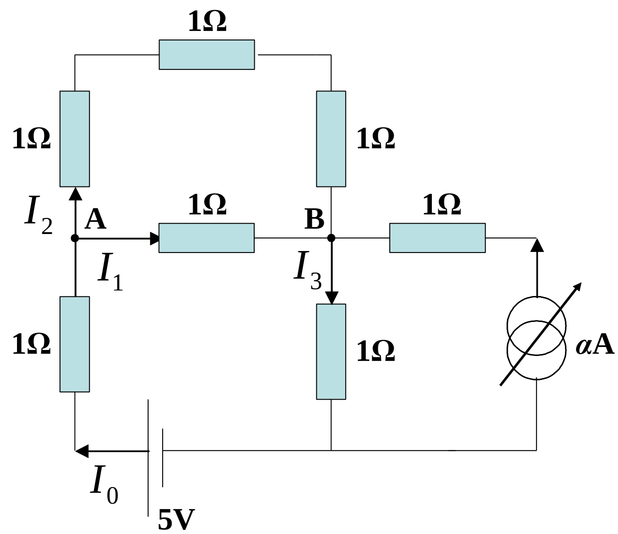
b) Bereken de potentiaal buiten en binnen de cilinder. Kies het nulpunt voor de potentiaal op $s = 0$.



OPGAVE 3

Punten: a+b+c+d+e=3+3+3+5+4=18

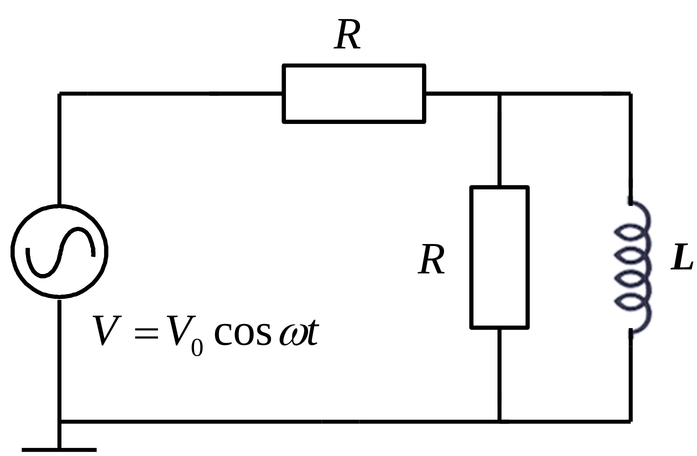
Gegeven is de hiernaast getekende schakeling met een spanningsbron, een variabele stroombron en 7 weerstanden. De variabele stroombron is ingesteld op een stroom van α Ampere.



a) Hoeveel knooppunten zijn er? Pas in ieder knooppunt de eerste wet van Kirchhoff toe en geef de hieruit volgende vergelijkingen
b) Hoeveel mazen zijn er? Pas voor iedere maas de tweede wet van Kirchhoff toe en geef de hieruit volgende vergelijkingen.
c) Gebruik de gevonden vergelijkingen om de waarde van α te bepalen waarbij het spanningsverschil $V_{AB} = V_A - V_B$ precies 1 Volt is.

Gegeven is de hieronder getekende schakeling met een stationaire wisselspanningbron die in de reële schrijfwijze beschreven wordt door $V = V_0 \cos \omega t$.

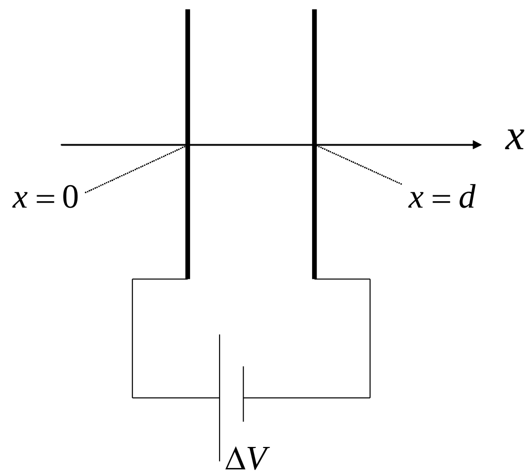
d) Bereken de spanning in het punt A in de complexe schrijfwijze.
e) Geef de spanning in het punt A in de reële schrijfwijze.



OPGAVE 4

Punten: a+b+c+d+e+f+g+h=2+3+2+2+2+3+2+2=18

Een vlakke plaat condensator is verbonden met een spanningsbron die er voor zorgt dat er een potentiaalverschil ΔV over de platen staat. Het oppervlak van de platen is S en de afstand tussen de platen is d. Neem aan dat het oppervlak S groot en de afstand tussen de platen d klein is zodat randeffecten mogen worden verwaarloosd.



a) Geef de wet van Gauss in integrale vorm.

b) Stel dat de oppervlakteladingsdichtheid op de positieve plaat gegeven is door σ. Bewijs dat het elektrische veld van de condensator gegeven wordt door $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x}$; binnen de platen en $\vec{E} = 0$; buiten de platen.

c) Laat zien dat oppervlakteladingsdichtheid σ gegeven wordt door $\sigma = \frac{\Delta V \varepsilon_0}{d}$.

d) Bepaal de capaciteit C van de condensator.

Er wordt nu een diëlektricum tussen de platen geschoven waarvan de elektrische susceptibiliteit χ_e op de volgende wijze van de x-coördinaat afhangt: $\chi_e = \alpha x$, waarbij α een constante is.

e) Wat zijn de dimensies van α?

f) Stel dat met het diëlektricum de oppervlakteladingsdichtheid op de positieve plaat gegeven is door σ'. Laat zien dat de elektrische verplaatsing $\vec{D}$ in het diëlektricum gegeven wordt door: $\vec{D} = \sigma'\hat{x}$.

g) Bereken het elektrische veld $\vec{E}$ in het diëlektricum.

h) Bereken de verhouding $\frac{C}{C'}$, waarbij C' de capaciteit van de condensator met het diëlektricum is.

Uitwerking

OPGAVE 1

Onderdeel a)

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{enc}$$

Onderdeel b)

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = B2\pi s = \mu_0 I_0 \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi s}\hat{\varphi}$$

Onderdeel c)

Kies $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ en $\theta_1 = -\frac{\pi}{2}$

Onderdeel d)
Gebruik superpositie

Bijdrage bovenste draad

$$\sin\theta_1 = \frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ en } \sin\theta_2 = \sin\tfrac{\pi}{2} = 1$$

Dus $B = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi a}\left(1 + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Bijdrage onderste draad

$$\sin\theta_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ en } \sin\theta_2 = \sin\tfrac{\pi}{2} = 1$$

Dus $B = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi a}\left(1 - \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Bijdrage verticale lijnstuk

$\sin\theta_1 = \dfrac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ en $\sin\theta_2 = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Dus $B = \dfrac{\mu_0 I_0}{4\pi a}\left(\dfrac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

Richtingen,
Bovenste draad: papier uit
Onderste draad: papier in
Verticale draad: papier uit

Stel papier uit is $\hat{\varphi}$-richting dan wordt magneetveld gegeven door,

$$B = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi a}\left(1+\frac{2a+2b}{\sqrt{a^2+b^2}}-1\right)\hat{\varphi} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a}\left(\frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\hat{\varphi}$$

Onderdeel e)

Als b>>a; $B = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi a}\left(\dfrac{\frac{a}{b}+1}{\sqrt{(\frac{a}{b})^2+1}}\right) \rightarrow \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi a}\hat{\varphi}$

Als a>>b; $B = \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi}\left(\dfrac{\frac{b}{a}+1}{b\sqrt{(\frac{b}{a})^2+1}}\right) \rightarrow \dfrac{\mu_0 I_0}{2\pi b}\hat{\varphi}$

OPGAVE 2

Opgave 2
De E-velden staan in de $\hat{s}$ -richting

Gebruik voor het bepalen van de velden de wet van Gauss met een Gauss-cilinder (lengte *l* en straal *s*).

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Voor $s > R$; $Q_{enc} = l\int_0^R 2\pi s' \rho_0 s' ds' = \frac{2\pi}{3}\rho_0 l R^3$ en dus $2\pi s l E = \frac{2\pi}{3\varepsilon_0}\rho_0 l R^3 \Rightarrow E = \frac{1}{3}\frac{\rho_0 R^3}{\varepsilon_0 s}$

Voor $s \leq R$; $Q_{enc} = l\int_0^s 2\pi s' \rho_0 s' ds' = \frac{2\pi}{3}\rho_0 l s^3$ en dus $2\pi s l E = \frac{2\pi}{3\varepsilon_0}\rho_0 l s^3 \Rightarrow E = \frac{1}{3}\frac{\rho_0 s^2}{\varepsilon_0}$

Voor de potentiaal kiezen we het nulpunt via $V(s=0) = 0$.

$$V(s) - V(0) = V(s) = -\int_0^s \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

voor $s \leq R$; $V(s) = -\int_0^s \frac{\rho_0 s'^2}{3\varepsilon_0} ds' = -\frac{\rho_0 s^3}{9\varepsilon_0}$

voor $s > R$; $V(s) = -\int_0^R \frac{\rho_0 s'^2}{3\varepsilon_0} ds' - \int_R^s \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0 s'} ds' = -\frac{\rho_0 R^3}{9\varepsilon_0} - \frac{\rho_0 R^3}{3\varepsilon_0}\ln\left(\frac{s}{R}\right)$

OPGAVE 3

Onderdeel a)

Er zijn drie knooppunten.
Vergelijkingen van de knooppunten (3 stuks, twee onafhankelijke).

$$I_0 = I_1 + I_2$$
$$I_1 + I_2 = I_3 - \alpha$$
$$I_3 = I_0 + \alpha$$

Onderdeel b)

Er zijn drie mazen. De maas met de stroombron levert geen vergelijking.

$$-I_0 - I_1 - I_3 + 5 = 0$$
$$-I_2 - I_2 - I_2 + I_1 = 0$$

Onderdeel c)

$$-I_2 - I_2 - I_2 + I_1 = 0 \Rightarrow I_1 = 3I_2$$

en met de eerste knoopvergelijking levert dit

$I_2 = \frac{1}{4} I_0$ en dus $I_1 = \frac{3}{4} I_0$

Gebruiken we deze uitdrukking voor I_1 samen met de laatste knoopvergelijking in de eerste maasvergelijking dan vinden we,

$$-I_0 - \frac{3}{4} I_0 - I_0 - \alpha + 5 = 0 \Rightarrow I_0 = \frac{4}{11}(5-\alpha) \Rightarrow I_1 = \frac{3}{11}(5-\alpha)$$

en het gevraagde spanningsverschil

$$V_{AB} = I_1(1\Omega) = 1 = \frac{3}{11}(5-\alpha) \Rightarrow \alpha = 5 - \frac{11}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{4}{3}$$

Onderdeel d)

Hier wordt eerst de uitwerking gegeven voor het geval de weerstanden verschillende zijn, R_1 is de horizontale weerstand, R_2 is de verticale weerstand.
Definieer stromen I (door de spanningsbron naar boven), I_1 (door de verticale weerstand naar beneden) en I_2 (door de spoel naar beneden).

Kirchhoff 1,

$I = I_1 + I_2$

Kirchhoff 2 (met de klok mee),

$$V_0 - IR_1 - I_1 R_2 = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{V_0 - IR_1}{R_2}$$

$$I_1 R_2 - I_2 Z_L = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{R_2}{Z_L} I_1 = \frac{R_2}{Z_L} \frac{V_0 - IR_1}{R_2}$$

En dit invullen in de knoopvergelijking geeft,

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V_0}{R_2} - I \frac{R_1}{R_2} + \frac{V_0}{Z_L} - I \frac{R_1}{Z_L} \Rightarrow I = \frac{\frac{V_0}{R_2}\left(1 + \frac{R_2}{Z_L}\right)}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\left(1 + \frac{R_2}{Z_L}\right)\right)}$$

$$I_2 = \frac{R_2}{Z_L} \frac{V_0 - IR_1}{R_2} = \frac{R_2}{Z_L} \frac{V_0}{R_2} \left(1 - \frac{\frac{R_1}{R_2}\left(1 + \frac{R_2}{Z_L}\right)}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\left(1 + \frac{R_2}{Z_L}\right)\right)} \right) = \frac{V_0}{Z_L} \frac{1}{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\left(1 + \frac{R_2}{Z_L}\right)\right)} =$$

$$\frac{V_0}{\left(Z_L + \frac{R_1}{R_2}\left(Z_L + R_2\right)\right)} = \frac{V_0}{\left(R_1 + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) Z_L\right)} = \frac{V_0}{\left(R_1 + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) i\omega L\right)}$$

$$V_A = I_2 R_2 = \frac{V_0}{\left(\frac{R_1}{R_2} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) \frac{i\omega L}{R_2}\right)} = \frac{V_0}{\frac{R_1}{R_2}\left(1 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right) i\omega L\right)}$$

Onderdeel e)
Dit is de spanning in punt A in de complexe schrijfwijze. Voor de reële schrijfwijze vinden we,

$$\left|V_A\right| = \left| \frac{V_0}{\frac{R_1}{R_2}\left(1 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right) i\omega L\right)} \right| = \frac{V_0}{\frac{R_1}{R_2} \sqrt{1 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right)^2 \omega^2 L^2}}$$

$$\arg(V_A) = \varphi = \arg(V_0) - \arg(\frac{R_1}{R_2}) - \arg(1 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right) i\omega L) = 0 - 0 - \arctan(\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)\omega L})$$

Waaruit dan volgt voor de reële spanning,

$$V(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t + \varphi)}{\frac{R_1}{R_2}\sqrt{1 + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right)^2 \omega^2 L^2}}$$

met

$$\varphi = -\arctan(\frac{R_1 R_2}{(R_1 + R_2)\omega L})$$

De het rekenwerk van de opgave kan versimpeld worden door de twee weerstanden gelijk te stellen.

Dan wordt de uitwerking als volgt
Definieer stromen I (door de spanningsbron naar boven), I_1 (door de verticale weerstand naar beneden) en I_2 (door de spoel naar beneden).

Kirchhoff 1,

$$I = I_1 + I_2$$

Kirchhoff 2 (met de klok mee),

$$V_0 - IR - I_1 R = 0 \Rightarrow I_1 = \frac{V_0 - IR}{R}$$

$$I_1 R - I_2 Z_L = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{R}{Z_L} I_1 = \frac{R}{Z_L} \frac{V_0 - IR_1}{R}$$

En dit invullen in de knoopvergelijking geeft,

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V_0}{R} - I + \frac{V_0}{Z_L} - I\frac{R}{Z_L} \Rightarrow I = \frac{\frac{V_0}{R}\left(1 + \frac{R}{Z_L}\right)}{\left(2 + \frac{R}{Z_L}\right)}$$

$$I_2 = \frac{R}{Z_L}\frac{V_0 - IR}{R} = \frac{V_0}{Z_L}\left(1 - \frac{\left(1+\frac{R}{Z_L}\right)}{\left(2+\frac{R}{Z_L}\right)}\right) = \frac{V_0}{Z_L}\frac{1}{\left(2+\frac{R}{Z_L}\right)} =$$

$$\frac{V_0}{(R+2Z_L)} = \frac{V_0}{(R+2i\omega L)}$$

$$V_A = I_2 R = \frac{V_0 R}{(R+2i\omega L)} = \frac{V_0}{\left(1+\frac{2i\omega L}{R}\right)}$$

Onderdeel e)
Dit is de spanning in punt A in de complexe schrijfwijze. Voor de reële schrijfwijze vinden we,

$$|V_A| = \left|\frac{V_0}{\left(1+\frac{2i\omega L}{R}\right)}\right| = \frac{V_0}{\sqrt{1+\frac{4\omega^2 L^2}{R^2}}}$$

$$\arg(V_A) = \varphi = \arg(V_0) - \arg(1+\frac{2i\omega L}{R}) = 0 - \arctan(\frac{R}{2\omega L})$$

Waaruit dan volgt voor de reële spanning,

$$V(t) = \frac{V_0 \cos(\omega t + \varphi)}{\sqrt{1+\frac{4\omega^2 L^2}{R^2}}}$$

met

$$\varphi = -\arctan(\frac{R}{2\omega L})$$

OPGAVE 4

a) Wet van Gauss in integrale vorm $\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

b) Wegens symmetrie is het elektrisch veld overal in de x-richting. Veldlijnen vertrekken van de plaat met de hoge potentiaal en eindigen op de plaat met de lage potentiaal.

Elektrisch veld van 1 plaat. Maak Gauss doosje zoals op bladzijde 73 van Griffiths. Dan toepassen van de wet van Gauss: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{a} = AE + AE = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$. Dus voor de positieve plaat geldt $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}$ als $x > 0$ en $\vec{E} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}$ als $x < 0$. En voor de negatieve plaat geldt $\vec{E} = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}$ als $x > d$ en $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\hat{x}$ als $x < d$. Superpositie geeft dan dat er geen veld is buiten de condensator en dat binnen de condensator het veld gegeven wordt door: $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{x}$

c) Gebruik $V_+ - V_- = \Delta V = \int_0^d \vec{E}\cdot\hat{x}dx = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$

d) $C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{S\sigma}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$

e) Dimensies zijn m^{-1}

f) Toepassen van de wet van Gauss voor de elektrisch verplaatsing met een Gauss box met oppervlak *A* boven en onder de positieve plaat
$\oint \vec{D}\cdot d\vec{a} = Q_{free} = AD_{boven} + AD(x) = 0 + AD(x) = \sigma' A$. Dus $\vec{D} = \sigma'\hat{x}$.

Merk op dat buiten de condensator de polarisatie nul is (geen medium) en dat de elektrische verplaatsing dus gelijk is aan het elektrische veld, en dat was nul.

g) $\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0(1+\chi_e)}\hat{x} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0(1+\alpha x)}\hat{x}$

h) $V_+ - V_- = \Delta V = \int_0^d \vec{E}\cdot\hat{x}dx = \int_0^d \frac{\sigma'}{\varepsilon_0(1+\alpha x)}dx = \frac{\sigma' d}{\varepsilon_0}\frac{\alpha d}{\ln(1+\alpha d)}$

Dus $C' = \frac{Q'}{\Delta V} = \frac{S\sigma'}{\Delta V} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{\ln(1+\alpha d)}{\alpha d}$

En $\frac{C}{C'} = \frac{\alpha d}{\ln(1+\alpha d)}$